

Bernulijeva jednačina za realne tečnosti

- Ranije je izvedena Bernulijeva jednačina za savršen fluid i ona glasi:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2$$

- Pretpostavke za koje je izvedena ova jednačina su:
- Fluid je savršen
- Gustina fluida je konstantna
- Na fluid deluje sila Zemljine teže
- Kretanje je ustaljeno (stacionarno)
- Integraljenje se vrši duž strujnice

Bernulijeva jednačina za realne tečnosti

- Bernulijeva jednačina predstavlja, u mehanici fluida, **zakon o održanju mehaničke energije** i ukazuje da je pod gornjim uslovima (pretpostavkama) ukupna energija (zbir **kinetičke, potencijalne i pritisne** energije) konstantna duž strujnice.
- Eksperimentima je utvrđeno da kod realnog fluida brojne vrednosti ne odgovaraju stvarnim vrednostima.
- Ovo ukazuje da energija struje ne ostaje konstantna nego se troši na putu fluida.

Bernulijeva jednačina za realne tečnosti

- Ovde je reč o mehaničkoj energiji, jer ukupna fizička energija ostaje prema opštim fizičkim zakonima nepromenljiva.
- Izgubljeni deo mehaničke energije, kako se obično govori u praksi, prelazi u energiju druge vrste, npr. u toplotnu energiju koja je u datom slučaju nekorisna.
- Glavni uzrok ovom gubitku energije je trenje između delića čije je delovanje zanemareno prilikom izvođenja Bernulijeve jednačine.

Bernulijeva jednačina za realne tečnosti

- U cilju korekcije jednačine polazi se od Navije-Stoksove jednačine za viskozan nestišljiv fluid:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}$$

- Ako se zadrže sve ostale pretpostavke, koje su bile učinjene prilikom izvođenja Bernulijeve jednačine, i ako se ponove iste računске radnje, dobija se:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \int_{l_1}^{l_2} (\Delta \vec{v}, d\vec{l})$$

Bernulijeva jednačina za realne tečnosti

- Prethodno izvedena jednačina sadrži dopunski član koji zavisi od viskoznosti fluida i zato se ona može smatrati energijskom jednačinom za sve realne fluide.
- Dopunski član je dat u obliku integrala, ali je integracija čisto formalno naglašena jer se raspored brzine duž strujnice ne zna te se integral ne može sračunati.
- U praksi se njegova vrednost ocenjuje prema izvedenim eksperimentima.
- Ovaj član je definisan kao Rv/g , gde Rv predstavlja rad viskoznih sila na putu delića čija je masa jednaka jedinici.

Bernulijeva jednačina za realne tečnosti

- U opštem slučaju kada se uzmu u obzir svi usputni gubici energije, a ne samo usled viskoznosti, dobiće se energijska jednačina za realan fluid u obliku:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_m$$

- Ovde se sa h_m označava odnos Rm/g , gde je Rm rad svih sila otpora na putu tečnosti (po jedinici mase)
- Ovaj član ime dimenziju u metrima, te se često naziva izgubljena visina.

Bernulijeva jednačina za realne tečnosti

- Hidraulička visina predstavlja zbir brzinske, geometrijske i pritisne visine, u jednoj tački strujnice.
- Razlika između hidrauličkih visina u dvema tačkama strujnice jednake je izgubljenoj visini, usled otpora strujanju fluida.
- Za srednje vrednosti pritiska i visine uzimaju se vrednosti koje pripadaju težištu preseka.

Određivanje “gubitaka” energije

- Član h_m energijske jednačine ima različite vrednosti zavisno od vrste otpora na koje fluid nailazi pri svom kretanju.
- U hidraulici se otpori dele na dve grupe i to:
 - **Otpori na pravolinijskom putu (otpori trenja)**
 - **Mesni (lokalni) otpori**
- Gubici energije prouzrokovani ovim otporima nazivaju se:
 - **Usputni gubici**
 - **Lokalni gubici**

Određivanje “gubitaka” energije

- Pod usputnim gubicima podrazumeva se “gubljenje” strujne energije na pravolinijskom putu izazvano trenjem fluida o dodirne površi čvrstog tela (na primer zidove cevi).
- Lokalni gubici se odnose na energiju koja se izgubi usled nagle promene pravca kretanja ili oblika struje (proširenje, suženje, kolena, račve, ...)

“Gubici” na pravolinijskom putu

- Sve dok je strujanje ustaljeno i izvodi se u pravoj liniji može se faktor trenja (ξ_t) smatrati konstantnom veličinom za dati protok fluida.
- Ukoliko se sa O označi obim dela normalnog preseka u kojem se nalazi fluid. Obično se ovaj obim naziva okvašenim obimom preseka kanala ili cevi.
- Usled trenja fluida o okvašenu površ javlja se sila:

$$F_w = \tau OL$$

- Gde je τ -tangenti napon, a L -dužina cevi.

“Gubici” na pravolinijskom putu

- Da bi strujanje moglo da se ustali mora se ova sila uravnotežiti drugom takođe u prahu strujanja, ali koja je suprotnog smera od sile trenja.
- To je sila usled razlike pritisaka:

$$F_p = p_1 A_1 - p_2 A_2$$

- Kako je površina poprečnog preseka nepromenljiva ($A_1 = A_2$) a h_m mehanički rad po jedinici gravitacione mase, tada važi:

$$(p_1 - p_2) A = \tau OL = \rho g h_m A$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_m \quad \Rightarrow \quad h_m = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$$

“Gubici” na pravolinijskom putu

- Ako se sada unese izraz za pad pritiska u kružnoj cevi:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \xi_t \frac{l}{d} \frac{v^2}{2} \rho$$

- Dobija se da je:

$$h_m = \frac{\Delta p}{\rho g} = \xi_t \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad \text{Darsijev obrazac}$$

- ξ_t -faktor trenja, v -srednja brzina u protočnim presecima
- Faktor trenja za turbulentno strujanje zavisi od Reynoldsovog broja i od relativne hrapavosti cevi:

$$\xi_t = \xi_t(\text{Re}, \delta/D) \quad \text{Za laminarno strujanje važi: } \xi_t = \xi_t(\text{Re})$$

Izrazi za koeficijent trenja

- Kod laminarnog strujanja kroz prave cevi kružnog poprečnog preseka važi:

$$\xi_t = \frac{64}{\text{Re}}$$

- Za turbulento strujanje kroz prave cevi kružnog poprečnog preseka važi:

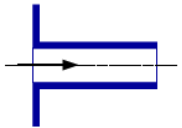
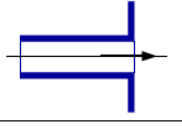
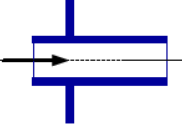
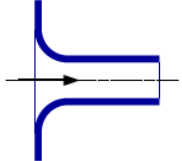
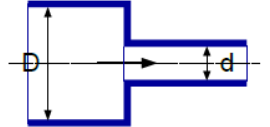
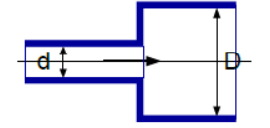
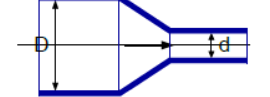
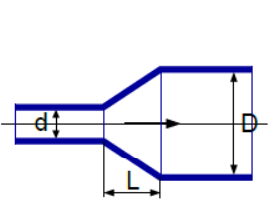
$$\frac{1}{\sqrt{\xi_t}} = -2 \log \left(\frac{e/d}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\xi_t}} \right)$$

Lokalni gubici

- Lokalni gubici energije računaju se korišćenjem izraza:

$$h_m = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

- Faktor ζ ima stalnu vrednost za datu vrstu otpora.
- Fizički se ovo objašnjava time što otpor strujanju pretežno potiče od mestnih (lokalnih) vrtloga koji se javljaju u struji pa ζ slabo zavisi i od Rejnoldsovog broja.
- Faktor ζ određuje se eksperimentalno. U izuzetnim slučajevima kao što je naglo proširenje preseka, mogu se faktori odrediti teorijski, primenom Bordine teoreme.

Item		Local resistance coefficient; ξ [-]																
Inlet to pipe		$\xi = 0.5$ (sharp edges) $\xi = 0.2$ (rounded edges)																
Outlet from pipe		$\xi = 1.0$																
Inward projecting pipe		$\xi = 1.0$																
Rounded inlet		$\xi = 0.05$																
Sudden contraction		<table border="1"> <thead> <tr> <th>D/d</th> <th>1.5</th> <th>2.0</th> <th>2.5</th> <th>3.0</th> <th>3.5</th> <th>4.0</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>ξ</td> <td>0.28</td> <td>0.36</td> <td>0.40</td> <td>0.42</td> <td>0.44</td> <td>0.45</td> </tr> </tbody> </table>	D/d	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	ξ	0.28	0.36	0.40	0.42	0.44	0.45		
D/d	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0												
ξ	0.28	0.36	0.40	0.42	0.44	0.45												
Sudden enlargement		$\xi = \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]$																
Gradual reduction		$\xi = 0.5$																
Gradual enlargement		$\xi = \xi' \times \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]$ <table border="1"> <thead> <tr> <th>(D-d)/(2L)</th> <th>0.05</th> <th>0.10</th> <th>0.20</th> <th>0.30</th> <th>0.40</th> <th>0.50</th> <th>0.80</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>ξ'</td> <td>0.14</td> <td>0.20</td> <td>0.47</td> <td>0.76</td> <td>0.95</td> <td>1.05</td> <td>1.10</td> </tr> </tbody> </table>	(D-d)/(2L)	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.80	ξ'	0.14	0.20	0.47	0.76	0.95	1.05	1.10
(D-d)/(2L)	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.80											
ξ'	0.14	0.20	0.47	0.76	0.95	1.05	1.10											
Exit loss (sharp edged, projecting, rounded)		$\xi = 1.0$																